16-11-16

~Previously on Beligiannis~

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε: $\sum_{d|n} d = d_1 + d_2 + \dots + d_m$, όπου

$\{d_1, \dots, d_m\}$: θετικοί διαιρέτες του n

• $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\tau(n)$ = πλήθος θετικών διαιρετών του n

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

• $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\sigma(n)$ = άθροισμα θετικών διαιρετών του n

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

• $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\varphi(n) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leq k \leq n \\ (k,n) = 1 \end{matrix} \right\} \right|$

• $\mu: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \exists\, p: \text{πρώτος} : p^2 | n \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1 p_2 \dots p_k : \text{πρωτογενής ανάλυση του } n \end{cases}$

Αν $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, μια αριθμητική συνάρτηση, τότε ορίζουμε:

$$F: \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(\tau(n)), \quad \{d_1, \dots, d_{\tau(n)}\}: \text{σύνολο θετικών διαιρετών του } n$$

Προφανώς, $\{d_1, d_2, \dots, d_{\tau(n)}\} \equiv \left\{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_{\tau(n)}}\right\}$

πχ: $n = 12$

$\tau(12) = 6$, διότι οι θετικοί διαιρέτες του 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$

$$\varphi(12) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \le k \le 12 \\ (k, 12) = 1 \end{matrix} \right\} \right| = \left| \{1, 5, 7, 11\} \right| = 4$$

$\mu(12) = 0$

$$\sum_{d|12} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) =$$

$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$

↳ Συμβολίζουμε με $A = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid f: \text{συνάρτηση}\}$

το σύνολο όλων των αριθμητικών συναρτήσεων.

$\forall f,g \in A : (f+g) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \ (f+g)(n) = f(n) + g(n)$

$\forall f,g \in A : (f \cdot g) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \ (f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$

$$f * g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \ (f*g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{d \mid n} f\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = \sum_{\alpha \cdot b = n} f(\alpha) \cdot g(b)$$

Η αριθμητική συνάρτηση $f*g$ καλείται ενελικτικό γινόμενο ή γινόμενο Dirichlet των f,g.

Πχ: $(\varphi * \tau)(12) = \sum_{d \mid 12} \varphi(d)\, \tau\left(\frac{12}{d}\right) =$

$= \varphi(1)\tau(12) + \varphi(2)\tau(12/2) + \varphi(3)\tau(12/3) + \varphi(4)\tau(12/4) + \varphi(6)\tau(12/6) +$

$+ \varphi(12)\tau(12/12) =$

$= \varphi(1)\tau(12) + \varphi(2)\tau(6) + \varphi(3)\tau(4) + \varphi(4)\tau(3) + \varphi(6)\tau(2) +$

$+ \varphi(12)\tau(1) =$

$= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 28$

↳ $\varepsilon: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$

↳ $v: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $v(n) = 1$

↳ <u>Πρόταση</u>: Αν $f, g, h \in \mathcal{A}$ τότε ισχύουν τα εξής:

1) $f*g = g*f$ (μεταθετική ιδιότητα)

2) $f*\varepsilon = f = \varepsilon * f$ (Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου)

3) $f*(g*h) = (f*g)*h$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

<u>Απόδειξη</u>: 1) Αρκεί νδο $\forall n \in \mathbb{N}$: $(f*g)(n) = (g*f)(n)$

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\alpha \cdot b = n} f(\alpha) g(b) = \sum_{\alpha \cdot b = n} g(b) f(\alpha)$$

$$= (g*f)(n)$$

2) α) Αν $n=1 \Rightarrow (f*\varepsilon)(1) = f(1)\,\varepsilon(1) = f(1)$

β) Αν $n>1 \Rightarrow (f*\varepsilon)(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\varepsilon\left(\frac{n}{d}\right) \underline{\underline{d=n}}$

$$= f(n)\,\varepsilon\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f(d)\,\varepsilon\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) + 0, \quad \varepsilon(k) = 0 \ \forall k>1$$

Άρα, $(f*\varepsilon)(n) = f(n) \ \forall n>1$

Από τα α, β: $(f*\varepsilon)(n) = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f*\varepsilon = f = \varepsilon * f$

3) $[f*(g*h)](n) = \sum_{s\cdot t=n} f(s)(g*h)(t) =$

$= \sum_{s\cdot t=n} f(s) \sum_{r\cdot k=t} g(r)h(k) = \sum_{s\cdot r\cdot k=n} f(s)(g(r)h(k))$ (1)

Παρόμοια: $[(f*g)*h](n) = \sum_{t\cdot k=n} (f*g)(t)\, h(k) =$

$= \sum_{t\cdot k=n} \left(\sum_{s\cdot r=t} f(s)\cdot g(r)\right) h(k) = \sum_{s\cdot r\cdot k=n} (f(s)\cdot g(r))\, h(k)$ (2)

Επειδή $(f(s)\cdot g(r))h(k) = f(s)\cdot(g(r)\cdot h(k))$ έπεται ότι

$[f*(g*h)](n) = [(f*g)*h](n)$

↳ Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\varepsilon' \in A$:

$\underbrace{f*\varepsilon' = f}_{1} \underbrace{= \varepsilon' * f}_{2} \quad, \forall f \in A$

Τότε: $\boxed{\varepsilon' = \varepsilon}$

Από την (1): $f = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon * \varepsilon' = \varepsilon = \varepsilon'$ → απ' τη (2)

Άσκηση: $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} v(d) = \sum_{d|n} v(d\cdot 1) =$

$= \sum_{d|n} v(d)\cdot v(\frac{n}{d}) = (v*v)(n)$, $\forall n\in \mathbb{N}$

Άρα, $\boxed{v*v=\tau}$

! Θεωρούμε τη συνάρτηση: $i: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $i(n)=n$ *

$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \overset{*}{=} \sum_{d|n} i(d) = \sum_{d|n} i(d)\cdot 1 = \sum_{d|n} i(d)\cdot v(\frac{n}{d}) =$

$= (i*v)(n)$. Άρα, $\boxed{i*v=\sigma}$

Αν $f\in A$ τότε $F\in A$, όπου $F(n) = \sum_{d|n} f(d) =$

$= \sum_{d|n} f(d)\cdot 1 = \sum_{d|n} f(d) v(\frac{n}{d}) = (f*v)(n)$

Άρα, $\boxed{F=f*v}$

! Πρόβλημα: Στο σύνολο των αριθμητικών συναρτήσεων έχουμε ορίσει την πράξη $*$ η οποία είναι προσεταιριστική, μεταθετική και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ε.

↳ Υπάρχει $\forall f\in A$ αντίστροφο στοιχείο της f ως προς την $*$;

Δηλαδή, υπάρχει $g\in A$ έτσι ώστε $f*g=\varepsilon=g*f$;

Έστω ότι για την f, υπάρχουν $g_1, g_2 \in A$

$$\left.\begin{array}{l} f*g_1 \overset{①}{=} \varepsilon \overset{②}{=} g_1*f \\ f*g_2 \overset{③}{=} \varepsilon \overset{④}{=} g_2*f \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g_1=g_2}$$

① $f*g_1=\varepsilon \Rightarrow g_2*(f*g_1)=g_2*\varepsilon=g_2$

όμως, $g_2*(f*g_1)=(g_2*f)*g_1=\varepsilon*g_1=g_1$

↳ <u>Θεώρημα</u>: Αν $f\in A$, τότε $\exists\, g\in A: f*g=\varepsilon=g*f \Leftrightarrow f(1)\neq 0$

Αν $f(1)\neq 0$, τότε η g θα συμβολίζεται ως f^{-1} και ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}: \mathbb{N}\to\mathbb{C} \to f^{-1}(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{f(1)}, & n=1 \\ -\dfrac{1}{f(1)}\displaystyle\sum_{\substack{d\mid n\\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right)f^{-1}(d), & n>1 \end{cases}$$

<u>πχ</u>: i) $f^{-1}(2)=-\dfrac{1}{f(1)}\sum f(2)\,f^{-1}(1)=$

$$=-\frac{1}{f(1)}f(2)\cdot\frac{1}{f(1)}=-\frac{f(2)}{f(1)^2}$$

2) $f^{-1}(4) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|4 \\ d<4}} f\left(\frac{4}{d}\right) f^{-1}(d) =$

$= -\frac{1}{f(1)} \left[f(4) \cdot f^{-1}(1) + f(2) \cdot f^{-1}(2) \right] = \ldots$

3) φ^{-1} : υπάρχει διότι το $\varphi(1) = 1 \neq 0$

$\varphi^{-1}(4) = -\frac{1}{\varphi(1)} \sum_{\substack{d|4 \\ d<4}} \varphi(4/d)\, \varphi^{-1}(d) =$

$= -\frac{1}{\varphi(1)} \left[\varphi(4) \cdot \varphi^{-1}(1) + \varphi(2) \cdot \varphi^{-1}(2) \right] \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \varphi^{-1}(1) = \frac{1}{\varphi(1)} = 1 \\ \\ \varphi^{-1}(2) = -\frac{\varphi(2)}{\varphi(1)^2} = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1\left(\varphi(4) - 1 + 1 \cdot (-1)\right) = -1$